EAMAC Ecole Africaine de la Météorologie et de l'Aviation Civile	**Concours EAMAC 2023**	**Cycle : EXPLOITATION EN AERONAUTIQUE CIVILE**

Épreuve de : Mathématiques
Durée : 04 heures

Exercice 1 : (5 pts)
En utilisant les développements limités, calculer la limite de $h(x)$ quand x tend vers 0^+ avec
$$h(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} - \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

Exercice 2 : (5 pts)
Soient a et b deux réels distincts non nuls, calculer le déterminant d'ordre 4 suivant :
$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$
(On donnera une forme simplifiée).

Exercice 3 : (5 pts)
Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A_m et en déduire que A_m est diagonalisable.
2. Quel est le polynôme minimal de A_m ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $A_m^n = a_n A_m + b_n I_3$.
4. Calculer a_n et b_n en fonction de n et donner une expression de A_m^n en fonction de n.

Exercice 4. (5 pts)
On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et déterminer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x)$.
2. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer sa dérivée.
3. En intégrant F' sur $]0, +\infty[$, montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction.

Exercice 1 : (5 pts)

En utilisant les développements limités, calculons la limite de $h(x)$ quand x tend vers 0^+ avec

$$h(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} - \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

Nous savons que $e^x =_{0^+} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$. Donc $xe^x =_{0^+} x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$, $e^x - 1 =_{0^+} x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$. Par conséquent

$$h(x) = \frac{x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} - \ln\left(1 + \frac{1}{2}x + o(x)\right) = \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + \frac{1}{2}x + o(x)} - \ln\left(1 + \frac{1}{2}x + o(x)\right).$$

L'objectif étant de calculer la limite de h, on peut s'arrêter là. Finalement

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{1 + \frac{1}{2}x + o(x)} - \lim_{x \to 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{2}x + o(x)\right) = \frac{1}{1} - \ln(1) = 1$$

Exercice 2 : (5 pts)

Soient a et b deux réels distincts non nuls, calculons le déterminant d'ordre 4 suivant :

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

(On donnera une forme simplifiée).

Posons $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 \\ 1 & a+b & ab \\ 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}$. On a

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)\Delta_3 - \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab \\ 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)\Delta_3 - ab\Delta_2.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 \\ 1 & a+b & ab \\ 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)\Delta_2 - \begin{vmatrix} ab & 0 \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)\Delta_2 - ab(a+b).$$ Donc

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2\Delta_2 - ab(a+b)^2 - ab\Delta_2 = [(a+b)^2 - ab]\Delta_2 - ab(a+b)^2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - ab.$$ Finalement

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix} &= [(a+b)^2 - ab]((a+b)^2 - ab) - ab(a+b)^2 \\ &= (a^2 + ab + b^2)^2 - ab(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^4 + 2a^2(ab + b^2) + (ab + b^2)^2 - a^3b - 2a^2b^2 - ab^3 \end{aligned}$$

$$= a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 + a^2b^2 + 2ab^3 + b^4 - a^3b - 2a^2b^2 - ab^3$$
$$= a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4.$$

Exercice 3 : (5 pts)

Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A_m et en déduire que A_m est diagonalisable.
   $\chi_{A_k}(\lambda) = \det(A_k - \lambda I_3) = \det(A_{k-\lambda}) = (1 - k + \lambda)^2(k - \lambda + 2)$.
   Le polynôme caractéristique est scindé.
   Les valeurs propres de A_k sont $k-1$ et $k+2$ de multiplicité $m(k-1) = 2$ et $m(k+2) = 1$ respectivement.
   Comme $k+2$ est une racine simple de χ_{A_k} alors $\dim(\ker(A_k - (k+2)I_3) = 1 = m(k+2)$.
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(A_k - (k-1)I_3) = \ker(A_1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   $$\Leftrightarrow x + y + z = 0.$$
   Donc $\ker(A_k - (k-1)I_3) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires alors $\dim(\ker(A_k - (k-1)I_3)) = 2 = m(k-1)$.
   On conclut que A_k est diagonalisable.
2. Quel est le polynôme minimal de A_m ?
   Comme A_k est diagonalisable, le polynôme minimal de A_k est :
   $$P_{min}(X) = \big(X - (k-1)\big)\big(X - (k+2)\big).$$
3. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $A_m^n = a_n A_m + b_n I_3$.
   Raisonnons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, il existe a_n, b_n deux réels tels que :
   $$A_k^n = a_n A_k + b_n I_3.$$
   - $A_k = 1 \times A_k + 0 \times I_3$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.
   - Supposons qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $A_k^n = a_n A_k + b_n I_3$.
     On a
     $$A_k^{n+1} = A_k^n A_k = a_n A_k^2 + b_n A_k.$$
     Comme $P_m(A_k) = 0$ alors $A_k^2 = (2k+1)A_k - (k-1)(k+2)I_3$ alors il vient que
     $$A_k^{n+1} = \big((2k+1)a_n + b_n\big)A_k - (k-1)(k+2)a_n I_3$$
     D'où il existe $a_{n+1} = (2k+1)a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -(k-1)(k+2)a_n$ tels que
     $$A_k^{n+1} = a_{n+1}A_k + b_{n+1}I_3.$$

   Par le principe de récurrence, pour tout entier naturel non nul n,
   $$A_k^n = a_n A_k + b_n I_3.$$
4. Calculons a_n et b_n en fonction de n et donner une expression de A_m^n en fonction de n.
   Calculons a_n et b_n en fonction de n et donnons une expression de A_k^n en fonction de n.
   De $A_k^n = a_n A_k + b_n I_3$, $Q(X) = X^n - a_n X + b_n$ est un polynôme annulateur de A_k. Le polynôme Q admet les mêmes racines $(k - 1\ et\ k+2)$. Donc
   $$\begin{cases} (k-1)^n - a_n(k-1) + b_n = 0 & L1 \\ (k+2)^n - a_n(k+2) + b_n = 0 & L2 \end{cases}.$$
   $$b_n = a_n(k-1) - (k-1)^n = \frac{(k-1)(k+2)^n - (k-1)^n(k+2)}{3}$$

En faisant $L2 - L1$, on obtient

$$a_n = \frac{(k+2)^n - (k-1)^n}{3}.$$

En remplaçant a_n dans $L1$, on trouve $b_n = \frac{(k-1)(k+2)^n - (k-1)^n(k+2)}{3}$.

On peut donc écrire

$$A_k^n = \frac{(k+2)^n - (k-1)^n}{3}\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} + \frac{(k+2)^n + 2(k-1)^n}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(k-1)(k+2)^n - (k-1)^n(k+2)}{3} + \frac{(k+2)^n - (k-1)^n}{3}k & \frac{(k+2)^n - (k-1)^n}{3} & \frac{(k+2)^n - (k-1)^n}{3} \\ \frac{(k+2)^n - (k-1)^n}{3} & \frac{(k-1)(k+2)^n - (k-1)^n(k+2)}{3} + \frac{(k+2)^n - (k-1)^n}{3}k & \frac{(k+2)^n - (k-1)^n}{3} \\ \frac{(k+2)^n - (k-1)^n}{3} & \frac{(k+2)^n - (k-1)^n}{3} & \frac{(k-1)(k+2)^n - (k-1)^n(k+2)}{3} + \frac{(k+2)^n - (k-1)^n}{3}k \end{pmatrix}$$

Exercice 4. (5 pts)

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$.

1. Montrons que F est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et déterminons $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x)$.

   $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \arctan t - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout $x > 0$, $e^{-x(1+t^2)} \leq e^0 = 1$ donc $0 \leq F(x) \leq F(0) = \frac{\pi}{2}$. Cela prouve que F est bien définie sur $[0, +\infty[$.

   Pour la continuité nous application le théorème suivant :

   > **Théorème de continuité des intégrales à paramètres :** Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que
   >
   > - pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A;
   > - pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I;
   > - il existe $g : I \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable telle que, pour tout $x \in A$ et tout $t \in I$,
   >
   > $$|f(x,t)| \leq g(t).$$
   >
   > Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est continue sur A.

   Nous avons

   - Pour tout réel positif t, la fonction $x \longmapsto f(x,t) = \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$;
   - Pour tout réel positif x, la fonction $t \longmapsto f(x,t) = \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue par morceaux (car continue) sur $[0, +\infty[$;
   - Pour tout $x \in [0, +\infty[$ et tout $t \in [0, +\infty[$,

     $$|f(x,t)| = \left|\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right| = \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

     Cette dernière fonction $\left(t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}\right)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, +\infty[$. En effet elle est positive et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

   Par le théorème de continuité sous le signe intégrale, on conclut que F est continue sur $[0, +\infty[$.

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} F(x) = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty}\frac{\lim_{x\longrightarrow+\infty} e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt = \int_0^{+\infty} 0dt = 0.$$

La troisième égalité découle de la continuité de F.

2. Montrons que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminons sa dérivée.

Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres : Soit I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I et intégrable sur I;
- f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ définie sur $J \times I$;
- pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I;
- pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J;
- il existe $g : I \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable telle que, pour tout $x \in J$ et tout $t \in I$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le g(t).$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et, pour tout $x \in J$, $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

Nous avons

- Pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \longmapsto f(x,t) = \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et intégrable (car elle positive et F est définie sur $[0,+\infty[$) ;
- f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ définie par $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-x(1+t^2)}$ sur $]0,+\infty[\times [0,+\infty[$;
- Pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-x(1+t^2)}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$;
- Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-x(1+t^2)}$ est continue sur $]0,+\infty[$;
- La fonction $t \longmapsto e^{-a(1+t^2)}$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$ avec $a > 0$. En effet elle est positive et est négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$. Par ailleurs pour tout $x \in [a,+\infty[$, tout $t \in [0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = e^{-x(1+t^2)} \le e^{-a(1+t^2)}.$$

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on conclut que F est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$.

Ceci étant valable pour tout $a > 0$, on déduit que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

3. En intégrant F' sur $]0,+\infty[$, montrons que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

D'après 2. $F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-x(1+t^2)}dt = -e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-xt^2}dt$

En posant $u = \sqrt{x}t$, nous avons

$$F'(x) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du.$$

Par suite

$$F(x) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du\right)\left(\int_{+\infty}^{x} -\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt\right) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du\right)\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt\right).$$

À la limite quand x tend vers 0^+,

$$F(0) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du\right)\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt\right).$$

En posant $u = \sqrt{t}$, on a $du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

Par conséquent

$$2\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)^2 = F(0) \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$